Μαθημα 8ο 26/11/2018

Εφαρμογες

1) ΠΑΤ: $\begin{cases} y' = 1 - x\cos(xy) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ , $x \in [0,2]$

Νδο η $f(x,y) = 1 - x\cos(xy)$, πληροι την συνθηκη Lipschitz, $L=$;
Εχει το προβλημα μοναδικη λυση;

Απαντηση

$f(x,y) = 1 - x\cos(xy)$

ΘΜΤ $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |f_y(x,\xi)||y_1 - y_2|$ $\forall y_1, y_2$ με $y_1 < \xi < y_2$

$f_y = x^2\sin(xy)$ αρα $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \underbrace{|x^2\sin(xy)|}|y_1 - y_2|$ , $x \in [0,2]$
$\leq 4 \cdot |y_1 - y_2|$

Αρα $L = 4 = M$ αρα ισχυει η συνθηκη Lipschitz
Το ΠΑΤ εχει μοναδικη λυση αφου η ① η f συνεχης στο $[0,2]$ και
② πληροι τη συνθηκη Lipschitz

2) Να προσεγγιστει η λυση του ΠΑΤ: ① $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\{ \underline{y(t) = e^t \text{ αναλ. λυση}} \}$

με την αμεση μεθοδο του Euler και αναπτυγμα Taylor 2ης ταξης
για ομοιομορφη διαμεριση στο $[0,1]$, με βημα $h = 0.1$.
Τι παρατηρειται; Να υπολογιστει το $\delta^n$ για καθε βημα.

Απαντηση

Το ΠΑΤ $t_0 = 0$ , $y_0 = 1$ , $y^{n'} = y^n$

$t^0 = 0$ , $t^1 = 0 + 1\cdot h = 0.1$ , $t^2 = 0 + 2h = 0.2$ , $t^3 = 0 + 3h = 0.3$ ... $t^N = 0 + 10 \cdot 0.1 = 1$

- Η μέθοδος Euler λέει $y^{n+1} = y^n + h y^n = (1+h) y^n + \underbrace{O(h^2)}_{\text{Σφάλμα 2ης τάξης}}$
  - $n=0$: $y^1 = y^0(1+h) = 1\,(1+0.1) = \boxed{1.1}$ { ο υπολογιστής κάνει επαναληπτικά αυτή τη διαδικασία }
  - $n=1$: $y^2 = y^1(1+h) = 1.1\,(1+0.1) = 1.21$
  - $n=2$: $y^3 = y^2(1+h) = 1.21\,(1+0.1) = 1.331$

Καλύτερη ακρίβεια έχω με την Euler

- Με το ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης: $y^{n+1} = y^n + h\,y'^n + \frac{h^2}{2} y''^n + \underbrace{\frac{h^3}{6} y'''^n(\xi)}_{\text{Σφάλμα 3ης τάξης}}$ $\simeq O(h^3)$

$\Rightarrow \quad y^{n+1} = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) y^n$

  - $n=0$: $y^1 = \left(1 + 0.1 + \frac{0.1^2}{2}\right) \cancel{y^0}^{\,1} = \boxed{1.1050}$
  - $n=1$: $y^2 = \left(1 + 0.1 + \frac{0.1^2}{2}\right) y^1 = 1.2210$
  - $n=2$: $y^3 = \left(1 + 0.1 + \frac{0.1^2}{2}\right) y^2 = 1.3492$

Πίνακας μεθόδων

| $n$ | $t^n$ | $y(t^n)$ | $y^n$-Euler | $y^n$-Taylor | $\delta^n$-Euler | $\delta^n$-Taylor |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0.1 | 1.1052 | 1.1000 | 1.1050 | 0.0052 | 0.0002 |
| 2 | 0.2 | 1.2214 | 1.2100 | 1.2210 | 0.0114 | 0.0004 |
| 3 | 0.3 | 1.3498 | 1.3310 | 1.3492 | 0.0188 | 0.0006 |

Έχω βήμα $h=0.1$ με ακρίβεια $h^2 = 0.01$ Euler δηλ. έχω σφάλμα από το 2ο δεκαδικό ψηφίο ενώ $h^3 = 0.001$ Taylor δηλ. έχω σφάλμα από το 3ο δεκαδικό ψηφίο

▶ $\begin{cases} y'(t) = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y^{n+1} = y^n + f(t^{n+1}, y^{n+1}) & n = 0,1,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$ Πεπλεγμένη Euler

όταν η f πληροί την συνθήκη Lipschitz

Ακρίβεια μεθόδου: 1) $\|\varepsilon^n\| = \max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le Ch$

Δηλ. έχω ακρίβεια τάξης $= 1$ και $C = \frac{M}{2L}\left(e^{2L(b-a)} - 1\right)$

και $M = \max_{t \in [a,b]} |y''(t)|$

2) Η $f$ πληροί την μονόπλευρη Lipschitz τότε $\|\varepsilon^n\| \le C_2 h$

απόδειξη:

Η $f : [a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη μονόπλευρη Lipschitz

$\forall t\in[a,b]: \forall y_1,y_2\in\mathbb{R} : (f(t,y_1)-f(t,y_2), y_1-y_2)\le 0$

Έχουμε ότι $y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + \delta^n$

αριθμ: $y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$

οπότε $\varepsilon^{n+1} = y(t^{n+1}) - y^{n+1} = \varepsilon^n + h[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})] + \delta^n$

$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}|^2 \le |\varepsilon^n|\cdot|\varepsilon^{n+1}| + h|f(t^{n+1}) - f(t^{n+1}, y^{n+1})|\cdot|\varepsilon^{n+1}| + |\delta^n|\cdot|\varepsilon^{n+1}|$

$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}|^2 \le |\varepsilon^n|\cdot|\varepsilon^{n+1}| + |\delta^n|\cdot|\varepsilon^{n+1}| \Rightarrow \boxed{|\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + |\delta^n|} \le$

$\le |\varepsilon^n| + \max_{0\le i\le N}|\delta^i|$

$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + \max|\delta^i| \Rightarrow$ Επαγωγικά $|\varepsilon^n| \le \cancelto{0}{|\varepsilon^0|} + n\max|\delta^i|$

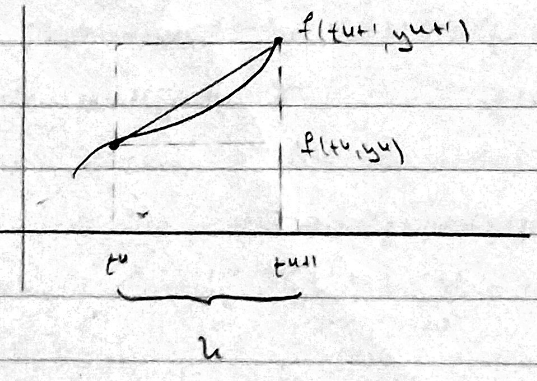
$\Rightarrow |\varepsilon^n| \le n\cdot\max_i|\delta^i| = n\cdot\frac{M}{2}h^2, \quad M = \max_{t\in[a,b]}|y''(t)| \Rightarrow$

$|\varepsilon^n| \le nh\frac{M}{2}h \Rightarrow \|\varepsilon^n\|_\infty = \max_n|y(t^n) - y^n| \le \underbrace{(b-a)\frac{M}{2}}_{C_2}\overset{\text{Τάξη 1}}{h}$

## Άλλες Μέθοδοι Χαμηλής Τάξης

■ **Μέθοδος Τραπεζίου** Μέθοδος αριθμ. ολοκλ. → Μονοβηματική

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[f(t^n,y^n) + f(t^{n+1},y^{n+1})] \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$



## Παρατηρήσεις

1) πεπλεγμένη μέθοδος

2) Τάξη ακρίβειας (ολικό σφάλμα) είναι τάξης 2

$\|e^n\|_\infty = \max_n |y(t^n) - y^n| \le C_2 h^p$, $p=2$ με $y$ και $f$ ομαλές συν.

3) Με ολοκλήρωση: $\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(\tau)\,d\tau = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\tau,y)\,d\tau \Rightarrow y(\tau)\Big|_{t^n}^{t^{n+1}} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f\,d\tau$

## Περιοχή απόλυτης ευστάθειας

Θεωρούμε το πρόβλημα δοκιμής: $\begin{cases} y' = \lambda y, \quad \lambda < 0, \quad t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Τότε με τη μέθοδο τραπεζίου έχουμε:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[\lambda y^n + \lambda y^{n+1}\right] \\ y^0 = y_0 \end{cases} \quad (*)$$

## Matlab:

```
clear; clc;
λ=-1;  N=10;
a=0;  b=10;  h=(b-a)/N;
t=linspace[a, b, N+1]
y(1)=1
for i=2 : N+1
    y(i)= y(i-1) +0.5*h*(λ*y(i-1) + λ*y(i))
end
```

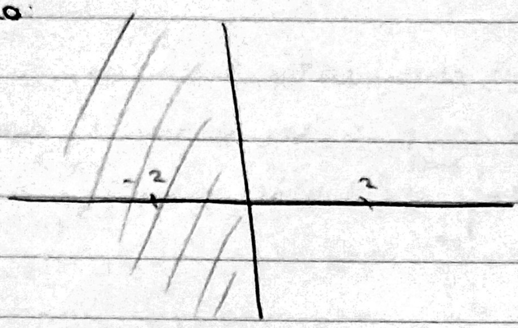
11 σημεία άρα 10 διαστήματα του χρόνου

$(*) \Rightarrow \left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) y^{n+1} = \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y^n \Rightarrow \quad \Rightarrow y^{n+1} = r(\lambda h)\, y^n$

με $r(\lambda h) = \dfrac{2+\lambda h}{2-\lambda h}$

Αρα $S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \} = \{ z \in \mathbb{C} : |z+2| \leq |z-2| \} = \mathbb{C}^-$

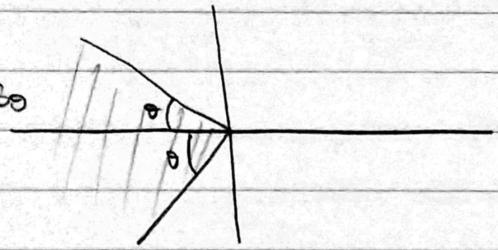
Σχηματικα:




■ <u>Παρατηρηση</u>

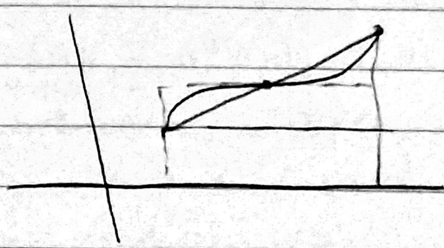
Μεθοδοι των οποιων η περιοχη απολυτης ευσταθειας ειναι ολοκληρο το αρνητικο ημιεπιπεδο του $\mathbb{C}$ ονομαζεται Α-ευσταθεις

Αν η μεθοδος περιεχει περιοχη απολυτης ευσταθειας το χωριο $S_\theta$ τοτε η μεθοδος λεγεται $A(\theta)$-ευσταθεις.




■ <u>Μεθοδος του μεσου</u>

$$y^{n+1} = y^n + h\,\frac{f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})}{2}$$



■ <u>Παρατηρηση</u>

Εχουμε πεπλεγμενη μεθοδο.

Για το προβλημα δοκιμης η μεθοδος του μεσου συμπιπτει με την μεθοδο του τραπεζιου αρα $S = \mathbb{C}^-$

▶ Η μέθοδος του μέσου είναι Β-ευσταθής; (*)

Μια μέθοδος είναι Β-ευσταθής, αν όταν ισχύει η μονόπλευρη Lipschitz τότε η ακολουθία των σφαλμάτων είναι φθίνουσα, δηλ:

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\| \quad , n=0,1,2,\dots$$

## Απόδειξη (*)

Αρκεί να δείξω την μονόπλευρη Lipschitz, δηλ.

$\forall t \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ : $\big(f(t,y_1) - f(t,y_2), \, y_1 - y_2\big) \le 0$

τότε η ακολουθία των διαφορών είναι φραγμένη

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\| \Rightarrow \|\varepsilon^{n+1}\| \le \|\varepsilon^n\| \quad , n=0,1,2,\dots$$

όταν μιλάω για ευσταθεια πάντα
γράφω τα 2 διακριτά ΠΑΤ

Προβλ. δοκιμής, μέθοδος μέσου

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + \frac{h}{2}(z^n + z^{n+1}) \\ z^0 = z_0 \end{cases}$$

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h\left[\frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}) - \frac{1}{2}(z^n + z^{n+1})\right]$$

Θέλουμε νδο $\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\|$

$$\left(y^{n+1} - z^{n+1}, \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}) + \frac{1}{2}(y^n - z^n)\right) \le \left(y^n - z^n, \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}) + \frac{1}{2}(y^n - z^n)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}\cancel{(y^{n+1} - z^{n+1}, y^n - z^n)} \le \frac{1}{2}\|y^n - z^n\|^2 + \frac{1}{2}\cancel{(y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1})}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 \le \frac{1}{2}\|y^n + z^n\|^2 \Rightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\| < \|y^n - z^n\|$$

Άρα φθίνουσα ακολουθία άρα Β-ευσταθής